INVESTIGAÇÕES SOBRE PONTOS DE EQUILÍBRIO DE FUNÇÕES LUCRO POLINOMIAIS DE 4º GRAU GENÉRICA

INVESTIGATIONS ON GENERIC POLYNOMIAL 4RD ORDER PROFIT FUNCTIONS: BALANCE POINTS

Diógenes Bosquetti[I]
Alexandre de Souza Fernandes[II]
Péricles Bosquetti[III]
Omar Maluf[IV]
Maurício Angeloni[V]

RESUMO

Os pontos de equilíbrio de uma função lucro descrita por uma função polinomial genérica do 4º grau são determinados. Neste cenário mais realista, efeitos, comportamentos, tendências podem ser previstos com maiores chances de acertos. Casos particulares e de interesse também estão determinados nesse estudo, traçando um panorama e proporcionando instrumento para aplicação em casos reais e de interesse, com a variação do parâmetro sob investigação. Dentre estes casos, destacam-se as equações biquadradas e também os casos em que o interesse comportamental só tem significado para valores positivos do parâmetro. Simulações e exemplos que elucidam o tratamento matemático está apresentado, complementado as explicações e o tratamento matemático realizado.

Palavras-chave: Administração. Gestão Financeira. Matemática. Funções. Polinômios.

ABSTRACT

The Profit Function Equilibrium Points´ described by a generic polynomial function of the 4th degree is determined. In this realistic scenario, effects, behaviors, trends can be predicted with greater chances of success and accuracy. Particular cases are also discussed in this study, allowing to construct a richer panorama and providing an instrument for application in real cases, with the variation of the parameter under investigation “x”. Among these cases, we highlight the bi-square equations and also the cases in which the behavioral interest has only meaning for positive values ($x \geq 0$). Simulations and examples complements the mathematical treatment presented in this work.

Keywords: Administration. Financial management. Mathematics. Functions. Polynomials.

[I] Prof. Pós-Dr. da Supervisão Regional 9: Ribeirão Preto/Franca/Barretos – São Paulo – Brasil. E-mail: diogenes.bosquetti@cps.sp.gov.br

[II] Prof. Me. da Faculdade de Tecnologia (FATEC) de Sertãozinho – São Paulo – Brasil. E-mail: alexandre.fernandes3@fatec.sp.gov.br

[III] Prof. Dr. da Faculdade de Tecnologia (FATEC) de Sertãozinho – São Paulo – Brasil. E-mail: pericles.bosquetti@fatec.sp.gov.br

[IV] Prof. Dr. da Faculdade de Tecnologia (FATEC) de Sertãozinho – São Paulo – Brasil. E-mail: omar.maluf@fatec.sp.gov.br

[V] Prof. Dr. da Faculdade de Tecnologia (FATEC) de Sertãozinho – São Paulo – Brasil. E-mail: mauricio.angeloni@fatec.sp.gov.br

Data de submissão do artigo: 12/06/2019.
Data de aprovação do artigo: 20/09/2019.
DOI:

1 INTRODUÇÃO

Pode-se definir como "função" a qualquer regra matemática particular e específica que satisfaz a condição a qual um determinado elemento de um conjunto (aqui representado pela variável "x") a outro (e único) elemento de outro conjunto (aqui definido pela variável "y"). Dessa forma, para cada valor de "x" existe um valor de "y" correspondente, obtido através da regra matemática preliminarmente definida.

Dentre as funções mais importantes e presentes na gestão financeira de uma empresa (OLIVEIRA, 2016), destaca-se a função lucro "L(x)", definida pela diferença entre duas outras funções nessa mesma variável: A função receita "R(x)" e a função custo "C(x)":

$$L(x) = R(x) - C(x). \tag{1}$$

A grandeza "x" é um parâmetro real, cujo significado pode variar caso a caso (número de itens comercializados, número de produtos confeccionados, entre outros). Usualmente, tal função é representada por um polinômio de segundo grau, porém não há impeditivos para que "L(x)" possa ser representada por funções polinomiais de ordens mais elevadas, em que outros efeitos e contribuições podem ser acrescentados além daqueles já previstos para os polinômios de grau 2. Trata-se, portanto, de uma generalização das análises usuais, com a previsão de comportamentos, tendências, efeitos que podem ser explicados ao se considerar polinômios de ordem maiores, criando cenários mais realistas de mercado. Evidentemente o preço que se paga nessas considerações é o tratamento matemático associado ser mais complexo. Entretanto, de nada adianta primar pela simplicidade e criar modelos não condizentes à realidade dos processos de uma empresa ou do mercado em geral.

Recentemente, foi analisado o caso de funções lucro descritas por funções polinomiais de 3º grau genéricas (BOSQUETTI *et al.*, 2018). Nesse trabalho, foram obtidas as condições de equilíbrio, bem como discutidos situações limites, em que os máximos e mínimos locais perdiam seus reinados em detrimento aos comportamentos assintóticos previstos para um polinômio de grau 3. Neste trabalho, analisaremos o cenário de funções lucro em situações de equilíbrio, descritas por funções polinomiais do 4º grau. Para isso, consideraremos os coeficientes "a", "b", "c", "d" e "e", todos independentes entre si e, também, da grandeza "x":

$$L(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e \quad com\ a \neq 0\,. \tag{2}$$

Tendo em vista o objeto do estudo aqui realizado, os pontos de equilíbrio acontecem toda vez que a função receita "R(x)" e a função custo "C(x)" se equivalem, ou seja, a empresa não tem nem lucro nem prejuízo:

$$Condição\ R(x) = C(x) \quad \rightarrow \quad ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0, \quad com\ a \neq 0\,. \tag{3}$$

Matematicamente, esse comportamento é equivalente à determinação das raízes de uma equação polinomial de 4º grau na variável "x", as quais devem satisfazer as seguintes Condições de Girard (MUNDO EDUCAÇÃO, 2019).

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -b/a \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = c/a \\ x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 = -d/a \\ x_1x_2x_3x_4 = e/a \end{cases}, \quad (4)$$

em que "x_1", "x_2", "x_3" e "x_4" são tais que $L(x_1) = L(x_2) = L(x_3) = L(x_4) = 0$. Evidentemente o ponto de equilíbrio é uma situação delicada, instável e não confortável a uma empresa, indicando que ela está, tão somente, empatando o que gasta em relação à grandeza "x" sob análise. Isso pois, dentre as finalidades primeiras da empresa é ter lucro, principalmente pois podem acontecer reveses e fatos imprevistos que ela tenha que investir, pagar dívidas ou prejuízos, ou qualquer outra situação imprevista que causem danos ao capital financeiro da empresa. Dessa forma, o conhecimento desses pontos de equilíbrio pode ser tomado como limites máximos de tolerância à grandeza "x", os quais, uma vez ultrapassados (ou não atingidos, dependendo do caso), provocarão prejuízos à mesma, conforme exemplificado na Figura 1.

Um procedimento muito utilizado no tratamento matemático de equações polinomiais de grau maior que 2 é o de eliminar algumas potências da equação original. Para isso, costuma-se realizar uma mudança de variável (GARBI, 2007), a qual, nesse caso, é dado por:

$$z = x + \frac{b}{4a} \quad com\ a \neq 0\,, \quad (5)$$

Com a divisão de toda a equação (3) pelo parâmetro "a" e a inserção da grandeza "z" na equação (3), elimina-se o termo "x^3", apresentando apenas termos em "z^4", "z^2", "z" e um termo independente de "z", ou seja, tal procedimento produz uma equação incompleta do 4º grau em "z", a seguir apresentada:

$$z^4 + \alpha z^2 - \gamma z + \beta = 0\ , \quad (6)$$

em que os parâmetros "α", "β" e "γ" são tais que:

$$\alpha = c/a - \tfrac{3}{8}(b/a)^2\,, \quad (7)$$

$$\beta = -\tfrac{3}{256}(b/a)^4 + \tfrac{1}{16}(b/a)^2(c/a) - \tfrac{1}{4}(b/a)(d/a) + e/a\ , \quad (8)$$

$$\gamma = -\tfrac{1}{8}(b/a)^3 + \tfrac{1}{2}(b/a)(c/a) - d/a. \quad (9)$$

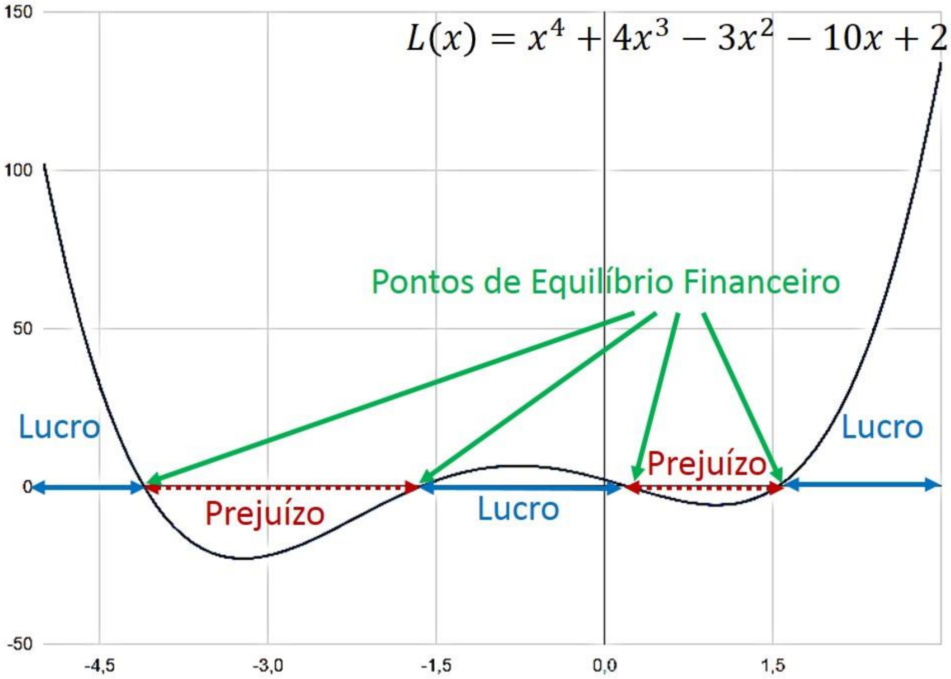
Outra manipulação matemática que usualmente é frequente nos polinômios acima de grau 2 é a possibilidade de utilizar produtos notáveis para simplificar a complexidade dos termos presentes na equação, deixando-a mais simples de ser tratada. No caso da equação (6), é possível realizar a soma e subtração (para não alterar a equação, evidentemente) pelo termo "$2\sqrt{\beta}z^2$". Assim procedendo, temos:

$$z^4 + 2\sqrt{\beta}z^2 - 2\sqrt{\beta}z^2 + \alpha z^2 - \gamma z + \beta = 0.\ . \quad (10)$$

Uma vez que $\left(z^2 + \sqrt{\beta}\right)^2 = z^4 + 2\sqrt{\beta}z^2 + \beta$, que é o produto notável da soma entre dois termos ao quadrado, reescrevemos a mesma da seguinte forma:

$$\left(z^2+\sqrt{\beta}\right)^2=\left(2\sqrt{\beta}-\alpha\right)z^2+\gamma z.. \quad (11)$$

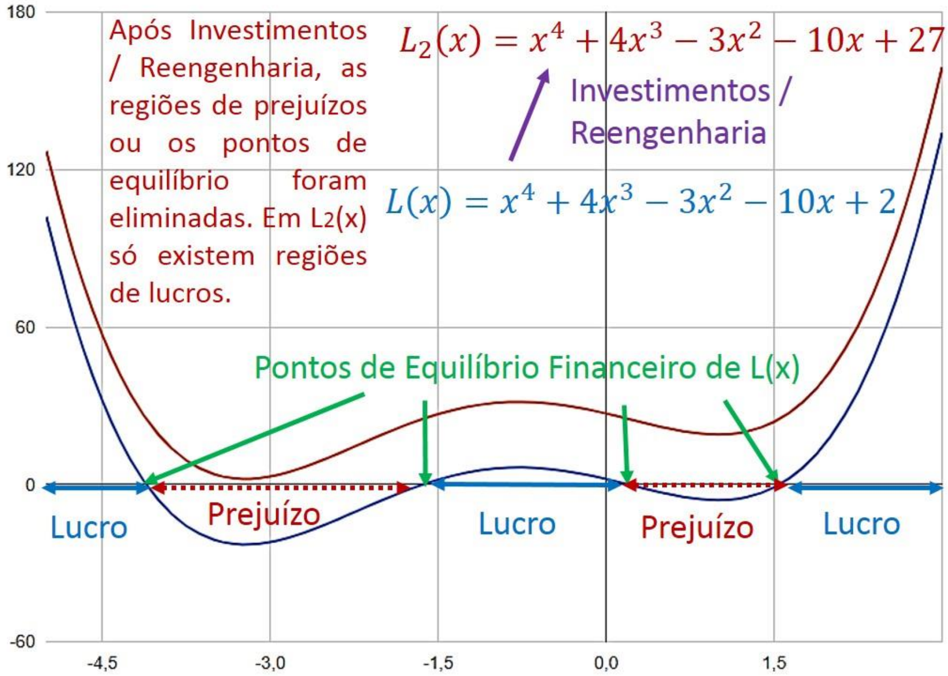
Figura 1 – Função Lucro do 4º Grau L(x) = $x^4 + 4x^3 – 3x^2 – 10x + 2$, com as regiões de lucro (L(x) > 0), prejuízo (L(x) < 0), explicitando os pontos de equilíbrio (L(x) = 0)



Fonte: gráfico criado pelos autores (2019)
Adaptado do gráfico gerado em http://www.calculadoraonline.com. br/grafica

O ponto de equilíbrio a ser perseguido nesse trabalho mostra quanto a empresa precisa ter de receita “R(x)” para ser lucrativa. É importante ressaltar, porém, que a partir de certos volumes de receita em relação à grandeza sob análise, gastos em investimentos, infraestrutura, marketing, transporte, contratação de mão-de-obra, estoque, almoxarifado e outros aspectos devem ser revistos, gerando gastos extras até a sua adequação. Ainda que exista uma relação direta em quantidade de vendas de um produto ou então da realização de alguma ação empresarial e seu retorno financeiro, é necessário avaliar a capacidade máxima da empresa em relação ao quesito considerado, pois, não raramente, patamares superiores só poderão ser atingidos a partir de investimentos preliminarmente realizados, o que acaba elevando os custos e as despesas fixas, conforme exemplificado na Figura 2. Nesse exemplo, foi modificado apenas o termo independente de “x” para que a estrutura da função polinomial não varie de forma significativa, facilitando a interpretação e o significado de se realizar tais ações em uma dada empresa, para adaptar ou atender uma demanda crescente no quesito atribuído à variável “x”.

Figura 2 – Função Lucro original $L(x) = x^4 + 4x^3 – 3x^2 – 10x + 2$, e Função Lucro após investimentos e reengenharia $L_2(x) = x^4 + 4x^3 – 3x^2 – 10x + 27$. Com isso, as regiões de prejuízos foram eliminadas assim como os pontos de equilíbrio.



Fonte: Gráfico criado pelos autores (2019)
Adaptado do gráfico gerado em http://www.calculadoraonline.com. br/grafica

2 PONTOS DE EQUILÍBRIO DE UMA FUNÇÃO LUCRO DE 4º GRAU

Na seção anterior, diversos aspectos da função lucro L(x) foram abordados, destacando a necessidade de se criar cenários mais realísticos e aplicáveis às análises mais complexas, em que mais fatores podem ser levados em consideração para o cômputo do lucro de uma empresa, para um dado quesito "x", o qual varia de corporação para corporação. Argumentou-se ainda da necessidade de a empresa realizar investimentos ou de ações de reengenharia para poder atender demandas crescentes (ou decrescentes) em relação ao quesito "x", sem que isso provoque prejuízos na mesma. Caso o quadro de prejuízos perdure por tempo significativo, a viabilidade em se manter o quesito "x" pode ser questionada. Nos casos em que isso acontece, é comum o uso de instrumentos de gestão da qualidade em uma tentativa de entender e solucionar o que está ocorrendo, ou então encerrar os serviços, produtos ou o que seja em relação a "x". Na continuidade das ações para se chegar a expressões algébricas que possam determinar os pontos de equilíbrio para uma função de 4º grau, realizamos, na equação (11) a seguinte permuta de termos.

$$\left(z^2+\sqrt{\beta}\right)^2 = \left(z^2+\sqrt{\beta}+y\right)^2 - \sigma. \qquad (12)$$

As quantidades "y" e "σ" são tais que não modifiquem a equação (11) original. Para isso, desenvolvemos a equação (12) de forma que $\left(z^2+\sqrt{\beta}\right)^2 = \left(z^2+\sqrt{\beta}\right)^2 + 2y\left(z^2+\sqrt{\beta}\right) + y^2 - \sigma$, resultando na relação:

$$\sigma = 2y\left(z^2 + \sqrt{\beta}\right) + y^2. \tag{13}$$

Desse modo que a equação (11), a qual investiga os pontos de equilíbrio da função lucro L(z), em que “z” e “x” estão relacionados através da equação $z = x + b/4a$, pode ser reescrita como:

$$\left(z^2 + \sqrt{\beta} + y\right)^2 - \sigma = \left(2\sqrt{\beta} - \alpha\right)z^2 + \gamma z. \tag{14}$$

Inserindo a equação (13) na equação anterior, temos $\left(z^2 + \sqrt{\beta} + y\right)^2 = 2y\left(z^2 + \sqrt{\beta}\right) + y^2 + \left(2\sqrt{\beta} - \alpha\right)z^2 + \gamma z$. Reescrevendo esse último resultado, com a introdução da quantidade “λ”, a qual está relacionado com as quantidades “α”, “β” e “y”, temos:

$$\left(z^2 + \sqrt{\beta} + y\right)^2 = \lambda z^2 + \gamma z + y\left(y + 2\sqrt{\beta}\right), \tag{15}$$

com

$$\lambda = 2\left(\sqrt{\beta} + y\right) - \alpha. \tag{16}$$

Após alguma manipulação algébrica, a identidade (15) toma a seguinte forma:

$$\left(z^2 + \sqrt{\beta} + y\right)^2 = \lambda(z^2 + \gamma z/\lambda + \omega), \tag{17}$$

em que

$$\omega = y[1 + (\alpha - y)/\lambda]. \tag{18}$$

O trinômio $z^2 + (\gamma/\lambda)z + \omega$ da equação (19) pode ser decomposto em um produto de dois polinômios de primeiro grau na variável “z”, de forma que $z^2 + (\gamma/\lambda)z + \omega = (z - z_+)(z - z_-)$, em que “$z_+$” e “$z_-$” são as raízes da equação $z^2 + (\gamma/\lambda)z + \omega$ =0. As formas matemáticas dessas raízes, são, portanto:

$$z_\pm = \frac{1}{2}\left[-\gamma/\lambda \pm \sqrt{(\gamma/\lambda)^2 - 4\omega}\right]. \tag{19}$$

Com isso, a equação (17) pode ser substituída pela seguinte expressão equivalente:

$$\left(z^2 + \sqrt{\beta} + y\right)^2 = \lambda(z - z_+)(z - z_-). \tag{20}$$

Vamos agora tentar escrever a equação (22) na forma a qual ambos os lados das equações sejam o produto de somas/subtrações de termos, todos elevados ao quadrado. Para isso, é necessário que $z_+ = z_- = -\gamma/2\lambda$, ou seja, que o discriminante da equação (19) se anule. Tal caso particular pode ser obtido, pois a variável auxiliar “y” ainda não foi determinada, possibilitando realizar uma escolha conveniente para a mesma. Assim procedendo, escrevemos:

$$\left(z^2 + \sqrt{\beta} + y\right)^2 = \left[\sqrt{\lambda}(z - z_+)\right]^2. \tag{21}$$

Tal simplificação resulta em duas possíveis equações de 2º grau (CYBERINI, 2018):

$$z^2 - \sqrt{\lambda}z + \left(y + \sqrt{\beta} - \frac{\gamma}{2\sqrt{\lambda}}\right) = 0, \tag{22}$$

$$z^2 + \sqrt{\lambda}z + \left(y + \sqrt{\beta} + \frac{\gamma}{2\sqrt{\lambda}}\right) = 0. \tag{23}$$

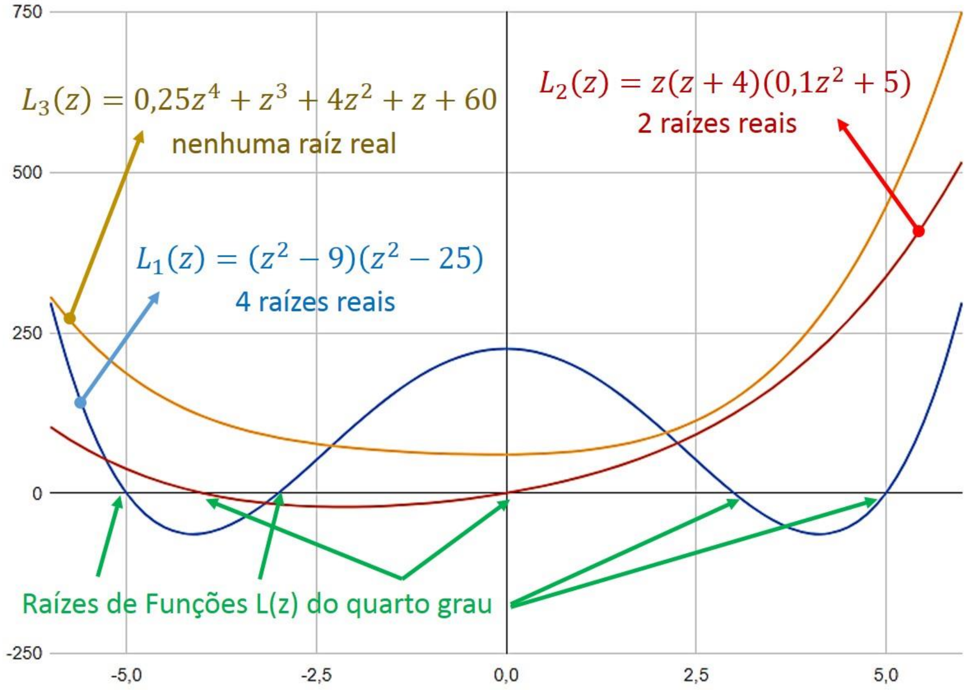
Assim sendo, escrevemos as soluções das equações (22) e (23) como se segue:

$$z_{1,2} = \frac{1}{2}\left[\sqrt{\lambda} \pm \sqrt{\lambda - 4\left(y + \sqrt{\beta} - \frac{\gamma}{2\sqrt{\lambda}}\right)}\right], \tag{24}$$

$$z_{3,4} = \frac{1}{2}\left[-\sqrt{\lambda} \pm \sqrt{\lambda - 4\left(y + \sqrt{\beta} + \frac{\gamma}{2\sqrt{\lambda}}\right)}\right]. \tag{25}$$

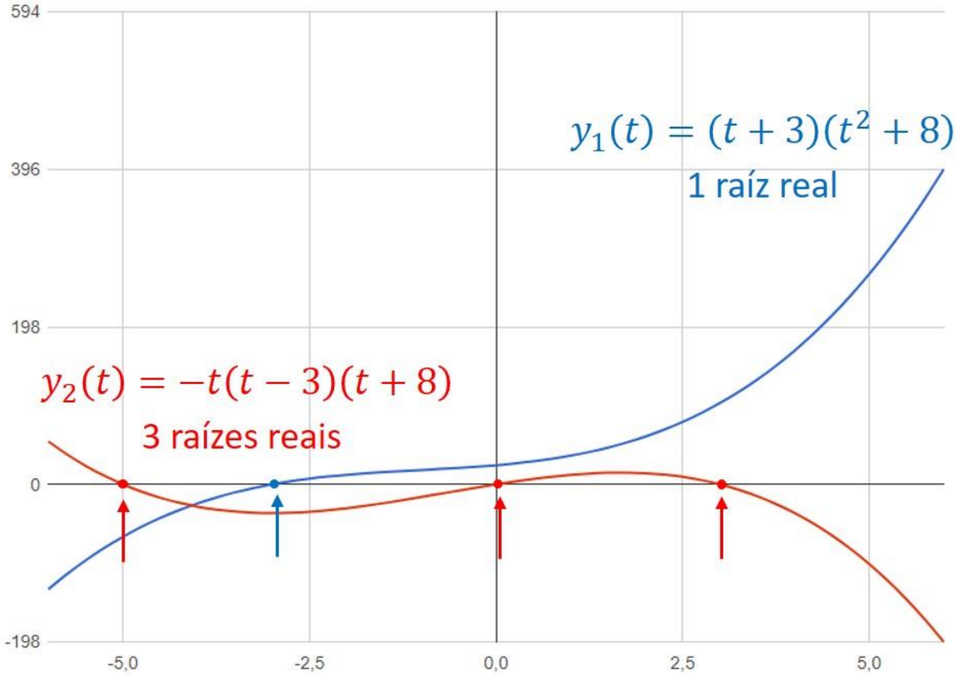
Conforme visto nas Figuras 1 e 2, nem todas as raízes associadas às expressões de "$z_{1,2}$" ou "$z_{3,4}$" são valores reais. Tais soluções podem ser desprezadas, pois não produzem significado na análise sob consideração, pois simplesmente o ponto de equilíbrio obtido não acontece. Na Figura 3 apresentamos alguns exemplos gráficos dessas situações.

Figura 3 – Raízes das Funções Lucro na variável "z" $L_1(z) = (z^2 - 9)(z^2 - 25)$, $L_2(z) = z(z+4)(0{,}1z^2 + 5)$ e $L_3(z) = 0{,}25z^4 + z^3 + 4z^2 + z + 60$, todas de 4º grau, com respectivamente 4, 2 e nenhuma raiz real.



Fonte: gráfico criado pelos autores (2019)
Adaptado do gráfico gerado em http://www.calculadoraonline.com. br/grafica.

Figura 4 – Raízes de Funções do 3º grau na variável "t": $y_1(t) = (t+3)(t^2 + 8)$ apresentando 1 raiz reais e $y_2(t) = -t(t-3)(t+8)$, apresentando 3 raízes reais e distintas



Fonte: gráfico criado pelos autores (2019)
Adaptado do gráfico gerado em http://www.calculadoraonline.com. br/grafica

Uma vez que $z = x + b/4a$, os pontos em que a empresa não apresenta nem ganhos, nem perdas para uma função lucro $L(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$, em que o coeficiente "a" não se anula, são dados por:

$$x_{1,2} = -\frac{b}{4a} + \frac{1}{2}\left[\sqrt{\lambda} \pm \sqrt{\lambda - 4\left(y + \sqrt{\beta} - \frac{\gamma}{2\sqrt{\lambda}}\right)}\right], \tag{26}$$

$$x_{3,4} = -\frac{b}{4a} + \frac{1}{2}\left[-\sqrt{\lambda} \pm \sqrt{\lambda - 4\left(y + \sqrt{\beta} + \frac{\gamma}{2\sqrt{\lambda}}\right)}\right]. \tag{27}$$

Os parâmetros "α", "β" e "γ" estão relacionados com os coeficientes "a", "b", "c", "d" e "e" através das equações (7), (8) e (9), respectivamente. O parâmetro $\lambda = 2\left(\sqrt{\beta} + y\right) - \alpha$ é tal que:

$$\lambda = 2\left(\sqrt{-\frac{3}{256}\left(\frac{b}{a}\right)^4 + \frac{1}{16}\left(\frac{b}{a}\right)^2\left(\frac{c}{a}\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{b}{a}\right)\left(\frac{d}{a}\right) + \frac{e}{a}} + y\right) - \frac{c}{a} + \frac{3}{8}\left(\frac{b}{a}\right)^2. \tag{28}$$

Para que existam raízes reais nas equações (26) e (27) é necessário que tanto β quanto λ sejam iguais ou maiores que zero, ou seja, que sejam satisfeitas as condições:

$$\beta \geq 0 \qquad \text{e} \qquad y \geq \tfrac{1}{2}\alpha - \sqrt{\beta}\,. \tag{29}$$

Tais condições são necessárias, mas, por si só, não garantem a existência de raízes reais. É necessário também que a composição de termos contidos dentro da segunda raiz quadrada das equações para $x_{1,2}$ e $x_{3,4}$ sejam maiores ou iguais a zero, resultando nas inequações $\lambda^{3/2} - 4\left(y + \sqrt{\beta}\right)\lambda^{1/2} + 2\gamma \geq 0$ e $\lambda^{3/2} - 4\left(y + \sqrt{\beta}\right)\lambda^{1/2} - 2\gamma \geq 0$. Os parâmetros "y" e "$\lambda$" estão inter-relacionados pela equação $y = 0{,}5(\lambda + \alpha) - 2\sqrt{\beta}$, de modo que as condições anteriores podem ser reescritas como:

$$\lambda^{3/2} + 2\left(\alpha - 2\sqrt{\beta}\right)\lambda^{1/2} - 2\gamma \leq 0 \qquad \text{e} \qquad \lambda^{3/2} + 2\left(\alpha - 2\sqrt{\beta}\right)\lambda^{1/2} + 2\gamma \leq 0 \,.. \tag{30}$$

Dessa forma, para que as equações (26) e (27) tenham raízes reais, as inequações (29) devem ser satisfeitas e, pelo menos uma das inequações (30) a ser obedecida. Em caso de não atendimento do que foi exposto, inexistirá pontos de equilíbrio para a função lucro.

Considerando ainda o caso de valores exclusivamente da grandeza "x", as condições para ocorrência de pontos de equilíbrio devem ainda ser acrescentada através da satisfação de das condições $x_{1,2} \geq 0$ e $x_{3,4} \geq 0$, ou seja:

$$\begin{gathered}\sqrt{\lambda - 4\left(y + \sqrt{\beta} - \frac{\gamma}{2\sqrt{\lambda}}\right)} \geq \frac{b}{2a} - \sqrt{\lambda} \quad ou \quad \sqrt{\lambda - 4\left(y + \sqrt{\beta} - \frac{\gamma}{2\sqrt{\lambda}}\right)} \leq -\frac{b}{2a} + \sqrt{\lambda} \;. \\ \sqrt{\lambda - 4\left(y + \sqrt{\beta} + \frac{\gamma}{2\sqrt{\lambda}}\right)} \geq \frac{b}{2a} + \sqrt{\lambda} \quad ou \quad \sqrt{\lambda - 4\left(y + \sqrt{\beta} + \frac{\gamma}{2\sqrt{\lambda}}\right)} \leq -\frac{b}{2a} - \sqrt{\lambda} \;.\end{gathered} \tag{31}$$

Dessa forma, existirão pontos de equilíbrio para valores positivos de "x" se, além das condições já apresentadas para que as equações (26) e (27) possam ter raízes reais, pelo menos uma das condições previstas nas equações (31) deve ser satisfeita.

Para que tal análise possa se completar, é necessário obter uma expressão para "y". Isso acontecerá na próxima seção.

3 EQUAÇÕES PARA O PARÂMETRO INDEPENDENTE "y"

As soluções para o parâmetro independente "y" pode ser conseguida retornando-se à condição particular adotada na equação (20), a qual estabelece que as raízes $z_+ = z_- = -\gamma/2\lambda$. Evidentemente isso ocorre quando o discriminante da equação (19) se anula, ou seja:

$$\gamma^2 - 4\omega\lambda^2 = 0\,. \tag{32}$$

Uma vez que $\omega = y(\lambda + \alpha - y)/\lambda$ e $\lambda = 2\left(\sqrt{\beta} + y\right) - \alpha$, a expressão anterior toma a forma $\gamma^2 = 4y\left(2\sqrt{\beta} + y\right)\left(2\sqrt{\beta} + 2y - \alpha\right)$. Essa equação, por sua vez, pode ser reescrita, explicitando as potências de "y". Assim fazendo, obtemos a seguinte expressão:

$$8y^3 + 4\left(6\sqrt{\beta} - \alpha\right)y^2 + 8\sqrt{\beta}\left(2\sqrt{\beta} - \alpha\right)y - \gamma^2 = 0. \tag{33}$$

Trata-se de uma equação de 3º grau na variável "y" o qual pode ser resolvido pela fórmula de Cardano (MATHCENTRE, 2009), apresentando três raízes "y_1", "y_2" e "y_3":

$$y_1 = \frac{\alpha}{6} - \sqrt{\beta} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \Delta} - \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \Delta}\,, \tag{34}$$

$$y_2 = \frac{\alpha}{6} - \sqrt{\beta} + \frac{1}{2}\left(-1 + i\sqrt{3}\right)\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \Delta} + \frac{1}{2}\left(1 + i\sqrt{3}\right)\sqrt[3]{\frac{q}{2} + \Delta}\,, \tag{35}$$

$$y_3 = \frac{\alpha}{6} - \sqrt{\beta} - \frac{1}{2}\left(1 + i\sqrt{3}\right)\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \Delta} + \frac{1}{2}\left(1 - i\sqrt{3}\right)\sqrt[3]{\frac{q}{2} + \Delta}\,, \tag{36}$$

em que as grandezas “Δ”, “q” e “p” são dadas por:

$$\Delta = \sqrt{(q/2)^2 + (p/3)^3}\ , \tag{37}$$

$$q = -\frac{1}{8}\gamma^2 + \frac{1}{3}\alpha\beta - \frac{1}{108}\alpha^3\,, \tag{38}$$

$$p = \frac{5}{4}\beta - \frac{3}{4}\alpha\sqrt{\beta} - \frac{1}{48}\alpha^2\,. \tag{39}$$

Ressalta-se que se $\Delta = 0$, a equação (33) terá três raízes reais, sendo duas iguais; Se $\Delta < 0$, a equação terá três raízes reais distintas; Se $\Delta > 0$, a equação terá uma raiz real e duas raízes complexas conjugadas.Tendo em vista que é necessário apenas uma raiz dentre as três possíveis, por simplicidade, adota-se como solução alguma raiz real para a variável “y”. Ressalta-se ainda que a referida equação do terceiro grau possui somente raízes reais ou uma raiz real e duas raízes complexas conjugadas, como se observa na Figura 4.

4 FUNÇÕES LUCRO DESCRITOS POR POLINÔMIOS BIQUADRADOS

Um caso particular de interesse na literatura trata-se de quando os coeficientes que multiplicam as potências “x^3” e “x” se anulam, de forma que a função lucro pode, nesse caso, ser simplificada para:

$$L(x) = ax^4 + cx^2 + e \quad com\ a \neq 0\,. \tag{40}$$

Uma vez que os pontos de equilíbrio continua a ocorrer quando a função receita “R(x)” e a função custo “C(x)” são iguais, então $ax^4 + cx^2 + e = 0$. Tal equação é usualmente conhecida como equação biquadrada (SO MATEMATICA, 2019), a qual pode ser reduzida facilmente a uma equação de 2º grau. Para isso, utilizamos a substituição $k = x^2$, de forma que:

$$ak^2 + ck + e = 0, \quad com\ a \neq 0\,. \tag{41}$$

De posse dessa equação, aplica-se a fórmula de Báskara:

$$k = \frac{1}{2a}\left[-c \pm \sqrt{c^2 - 4ae}\right]. \tag{42}$$

e os pontos de equilíbrio, se existirem, são determinados pelas equações:

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{1}{2a}\left[-c + \sqrt{c^2 - 4ae}\right]}\,, \tag{43}$$

$$x_{3,4} = \pm\sqrt{\frac{1}{2a}\left[-c - \sqrt{c^2 - 4ae}\right]}\,. \tag{44}$$

Para que as raízes possam ser reais nesse caso particular, é necessário que $c^2 \geq 4ae$, e que seja, pelo menos satisfeita uma das condições:

$$\frac{1}{2a}\left[-c + \sqrt{c^2 - 4ae}\right] \geq 0 \quad ou \quad \frac{1}{2a}\left[c + \sqrt{c^2 - 4ae}\right] \leq 0\,. \tag{45}$$

Adicionando as restrições $x_{1,2} \geq 0$ e $x_{3,4} \geq 0$, os sinais negativos das equações (43) e (44) devem ser desprezados, em adição de todas as condições já discutidas para a existência de pontos de contorno determinados por números reais.

5 CONCLUSÕES FINAIS

As expressões gerais associadas ao ponto de equilíbrio de uma função lucro L(x) descrita por um polinômio do 4º grau na variável "x" foram apresentadas. Nesse cenário, efeitos não previstos podem ser incluídos, construindo modelos de gestão financeira mais realistas. Dessa forma, os pontos de equilíbrio podem ser tratados como limites inferiores aos quais os custos "C(x)" e receitas "R(x)" se equivalem e a empresa não apresenta perdas. Cabe à mesma, porém traçar planos, adotar medidas e ações para que R(x) > C(x), produzindo lucro, ou seja, fazendo com que matematicamente L(x) > 0.

Para a obtenção das soluções, utilizou-se a equação $\left(z^2 + \sqrt{\beta} + y\right)^2 - \sigma = \left(2\sqrt{\beta} - \alpha\right)z^2 + \gamma z$ a qual apresenta variável auxiliar "y" a qual pode ser adotada como qualquer solução real da equação de 3º grau dada por $8y^3 + 4\left(6\sqrt{\beta} - \alpha\right)y^2 + 8\sqrt{\beta}\left(2\sqrt{\beta} - \alpha\right)y - \gamma^2 = 0$, a qual pode ser obtida pelo método de Cardano.

Um caso mais simples e usual na literatura acontece quando os coeficientes de ordem ímpar do polinômio de 4º grau se anulam, resultando em uma equação biquadrada de simples tratamento algébrico. Condições para a obtenção de raízes reais e também de raízes positivas foram discutidas, devendo a grandeza sob investigação "x" satisfazer diversas inequações restritivas ao seu valor. Independentemente dos valores adotados, cabe à empresa sempre adotar plano de ação para que as condições associadas à gestão financeira de seus produtos e serviços estejam favoráveis à mesma, promovendo sua perpetuação no mercado, bem como traçando estratégicas para seu crescimento, melhoria e diversificação de suas atividades.

REFERÊNCIAS

BOSQUETTI, D. *et al*. **Investigações sobre funções lucro de 3º grau genérica**: Pontos de Equilíbrio e de Lucros Máximo e Mínimo. 2018. Disponível em: http://sitefa.fatecsertãozinho.edu.br/index.php/sitefa/article/view/17/27. Acesso em: 01 mai. 2019.

CYBERINI, F. H. **Algoritmo da equação do quarto grau**. 2018. Disponível em: https://www.blogcyberini.com/2018/06/algoritmo-equacao-quarto-grau.html. Acesso em: 5 mai. 2019.

GARBI, G. G. O **Romance das equações algébricas**. 2007. Disponível em: http://www.andreatini.com.br/ferrari.htm. Acesso em: 01 mai. 2019.

MATHCENTRE, AC. UK. **Cubic equations**. 2009. Disponível em: http://www.mathcentre.ac.uk/resources/uploaded/mc-ty-cubicequations-2009-1.pdf. Acesso em: 12 mar. 2019.

MUNDO EDUCAÇÃO. **Relações de girard nas equações do 3º e do 4º grau**. Última Atualização, 2019. Disponível em https://mundoeducacao.bol.uol.com.br/matematica/relacoes-girard-nas-equacoes-3-4-grau.htm. Acesso em 3 mai. 2019.

OLIVEIRA, M. Função receita, função lucro e ponto de equilíbrio. **Contabilidade e matemática para negócios e concursos**. 2016. Disponível em: https://www.manoeloliveira.net.br /2016/10/funcao-receita-lucro-e-ponto-deequilibrio.html. Acesso em: 23 fev. 2019.

SO MATEMATICA. **Equações biquadradas**. 2019. Disponível em: https://www.somatematica.com.br/fundam/equacoes2/equacoes2_12.php. Acesso em: 2 mai. 2019.